

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ - LUẬT

KHOA TOÁN KINH TẾ

Chương 3. Các quy luật phân phối xác suất thông dụng

Thành phố Hồ Chí Minh, 2020

Nội dung

- 1 Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc
- 2 Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục
- 3 Xấp xỉ giữa các phân phối

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Bernoulli (Phân phối không - một)

Định nghĩa (Phân phối Bernoulli)

Trong phép thử Bernoulli, đặt X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc, trong đó $X = 1$ nếu biến cố A xảy ra, $X = 0$ nếu biến cố A không xảy ra.

Khi đó ta nói X có **phân phối Bernoulli** (hay X có phân phối không - một) với xác suất p , ký hiệu $X \sim B(1, p)$.

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Bernoulli (Phân phối không - một)

Bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	1
P	0.2	0.8

Ta có thể tính được trung bình của biến ngẫu nhiên X :

$\mathbb{E}(X) = 0.8$, và phương sai $\text{Var}(X) = 0.16$.

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối nhị thức

Định nghĩa (Phân phối nhị thức (tiếp))

X	0	1	2	...	n
P	p_0	p_1	p_2	...	p_n

trong đó, $P_n(k) = p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$, với $q = 1 - p$, $k = \overline{0, n}$.

Ta nói X có **phân phối nhị thức** và ký hiệu: $X \sim B(n, p)$.

Các **tham số đặc trưng** của $B(n, p)$: $\mathbb{E}(X) = np$, $\text{Var}(X) = npq$

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối nhị thức

Ví dụ minh họa

Tung một đồng xu đồng chất 10 lần. Mỗi phép thử có thể cho kết quả là sấp hoặc ngửa. Nếu chúng ta đặt cược vào sấp, chúng ta sẽ gắn nhãn "sấp" là thành công. Nếu đồng xu công bằng, xác suất mặt sấp là 50%, tức là, $p = 0.5$. Cuối cùng, chúng ta chú ý rằng các phép thử là độc lập bởi vì kết quả của một lần tung đồng xu không ảnh hưởng đến kết quả của những lần tung khác. Số lần thành công có phân phối nhị thức.

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối nhị thức

Ví dụ minh họa

Một nhân viên tư vấn bảo hiểm mỗi ngày tư vấn cho 5 khách hàng với xác suất để ký được 1 hợp đồng với mỗi người là 0.3. Với mỗi một hợp đồng nhận được thì người đó được hưởng hoa hồng là 200 000 đồng. Nếu mỗi tháng người đó tư vấn 20 ngày thì hoa hồng trung bình mỗi tháng nhân viên đó nhận là bao nhiêu?

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối nhị thức

Một tháng nhân viên đó tư vấn được $20 \times 5 = 100$ khách hàng. Gọi X là số hợp đồng nhân viên đó ký được từ 100 khách hàng được tư vấn. Khi đó ta có, $X \sim B(100, 0.3)$

Số hợp đồng trung bình người đó ký được trong một tháng là:

$$\mathbb{E}(X) = 100 \times 0.3 = 30$$

Vậy số tiền hoa hồng người đó có thể được hưởng trong 1 tháng là $200000 \times 30 = 6000000$ (đồng).

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối siêu bội

Định nghĩa (Phân phối siêu bội)

Cho một tập hợp gồm N phần tử, trong đó có m phần tử mang tính chất T . Lấy ra n phần tử từ tập hợp đó.

Gọi X là số phần tử mang tính chất T trong n phần tử lấy được, khi đó X là một đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị trong tập $\{0, 1, 2, \dots, \min\{m, n\}\}$. Phân phối xác suất của X được gọi là **phân phối siêu bội**, ký hiệu $X \sim H(N, m, n)$.

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối siêu bội

Định nghĩa (Phân phối siêu bội)

Bảng phân phối xác suất của X được biểu diễn dưới dạng :

X	0	1	...	k	...	$\min(m, n)$
P	p_0	p_1	...	p_k	...	$p_{\min(m, n)}$

trong đó: $P(X = k) = p_k = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$, với $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối siêu bội

Các **tham số đặc trưng của phân phối siêu bội**:

$$\mathbb{E}(X) = np; \text{Var}(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$$

với

$$p = \frac{m}{N}; q = 1 - p.$$

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối siêu bội

Ví dụ minh họa

Bóng đèn được sản xuất ở công ty Y được đóng gói theo hộp, mỗi hộp có 12 bóng đèn. Nhân viên chọn ngẫu nhiên 3 trong số 12 bóng đèn thuộc một hộp để kiểm tra.

Giả sử hộp ấy có chứa 5 bóng đèn bị hư, tính xác suất để nhân viên đó lấy được 1 bóng đèn hư trong 3 bóng đèn được lấy?

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối siêu bội

Đặt X là số bóng đèn bị hư nhân viên đó lấy được trong 3 bóng đèn. Khi đó, X tuân theo Ta cần tìm $P(X = 1)$. Ta có:

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 C_{12-5}^{3-1}}{C_{12}^3} = \frac{C_5^1 C_7^2}{C_{12}^3} = 0.4773$$

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối siêu bội

Ví dụ minh họa

Từ một hộp đựng 15 quả cam, trong đó có 5 quả hư, lấy ra 3 quả. Gọi X là số quả hư trong 3 quả lấy được. Hãy tính:

- Xác suất 3 quả đều hư
- Các tham số đặc trưng

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối siêu bội

Ta có $X \sim H(15, 5, 3)$.

Xác suất 3 quả đều hư là:

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3 C_1 0^0}{C_1 5^3} \approx 0.022.$$

Ngoài ra, trung bình (kỳ vọng) và phương sai của X là:

$$E(X) = \frac{3.5}{15} = 1 \text{ và } Var(X) = \frac{3.5}{15} \left(1 - \frac{1}{15}\right) \frac{15 - 3}{15 - 1} = \frac{4}{7}.$$

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

Định nghĩa (Phân phối Poisson)

Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc X tuân theo **phân phối Poisson**, kí hiệu $X \sim P(\lambda)$, nếu thoả mãn:

- Đối với hai khoảng bất kỳ có độ dài bằng nhau thì xác suất xảy ra bằng nhau.
- Việc xuất hiện hoặc không xuất hiện trong khoảng này thì độc lập với việc xuất hiện hoặc không xuất hiện trong khoảng khác.

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

Định nghĩa (Phân phối Poisson (tiếp))

X	0	1	...	k	...
P	p_0	p_1	...	p_k	...

trong đó, $P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ với $k = 0, 1, 2, \dots$

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

Các **tham số đặc trưng** của phân phối Poisson $P(\lambda)$:

$$\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$$

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

Ví dụ minh họa

Một tổng đài điện thoại tiếp nhận trung bình 5 cuộc điện thoại mỗi 3 phút. Tìm xác suất không có cuộc điện thoại nào đến trong phút kế tiếp.

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

Gọi X là số cuộc gọi trong 1 phút, khi đó $X \sim P(\lambda)$, với $\lambda = \frac{5}{3}$.

Do đó, xác suất không có cuộc điện thoại nào đến trong phút kế tiếp là:

$$P(X = 0) = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^0 e^{-\frac{5}{3}}}{0!} \approx 0.189$$

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

Ví dụ minh họa

Một nhà thống kê đã quan sát thấy rằng số lỗi đánh máy của sách giáo khoa thay đổi đáng kể từ sách này sang sách khác. Sau vài phân tích, anh kết luận rằng số lỗi là Poisson được phân phối với giá trị trung bình là 1.5 trên 100 trang. Biết quyển sách có tất cả 400 trang.

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

Ví dụ minh họa

- Chọn ngẫu nhiên 100 trang, tính xác suất để không có lỗi chính tả?
- Xác suất để quyển sách không có lỗi chính tả là bao nhiêu?
- Xác suất để quyển sách có nhiều nhất 5 lỗi chính tả là gì?

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

a. Chúng ta muốn xác định xác suất đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson với giá trị trung bình là 1.5 bằng 0. Sử dụng công thức xác suất thành phần với $x = 0, \mu = 1.5$, ta có:

$$P(0) = \frac{e^{-1.5} 1.5^0}{0!} = 0.2231.$$

Xác suất trong 100 trang được chọn không có lỗi là 0.2231.

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

b. Vì giá trị trung bình được chỉ định là 1.5 lỗi trên 100 trang, chúng ta nhân con số này với 4 để chuyển đổi thành giá trị trung bình trên 400 trang.

Như vậy, số lỗi chính tả trung bình trên 400 trang là $\mu = 6$.

Xác suất để quyển sách không có lỗi chính tả là:

$$P(0) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} = 0.002479.$$

1. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Phân phối Poisson

c. Xác suất để quyển sách có nhiều nhất 5 lỗi chính tả là:

$$P(X \leq 5) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$

Vậy:

$$P(X \leq 5) = 0.4457.$$

Xác suất để có nhiều nhất 5 lỗi chính tả trong cuốn sách này là 0.4457.

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối đều

Định nghĩa (Phân phối đều)

Phân phối đều là một phân phối mà xác suất xảy ra như nhau cho mọi kết cục của đại lượng ngẫu nhiên liên tục.

Hàm mật độ xác suất của phân phối đều liên tục trên đoạn $[a, b]$ có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{nếu } x \in [a, b] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [a, b] \end{cases}$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối đều

Cho X là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo phân phối đều liên tục trên khoảng $[a, b]$. Khi đó các **tham số đặc trưng** của phân phối đều:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối đều

Ví dụ minh họa

Lượng xăng/dầu bán ra hàng ngày tại một cửa hàng xăng dầu ở Thủ Đức tuân theo phân phối đều liên tục trong khoảng $[2000, 5000]$ (lít).

- Tìm xác suất cửa hàng đó bán được từ 2500 đến 3000 lít xăng/dầu?
- Xác suất mà cửa hàng đó bán ít nhất 4000 lít một ngày là bao nhiêu?

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối đều

Đặt X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số lít xăng/dầu cửa hàng đó bán được trong một ngày. Khi đó, X có phân phối đều liên tục trên khoảng $[2000, 5000]$. Hàm mật độ xác suất của X như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5000 - 2000} = \frac{1}{3000} & \text{nếu } x \in [2000, 5000] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [2000, 5000] \end{cases}$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối đều

a. Xác suất cửa hàng đó bán được từ 2500 đến 3000 lít xăng/dầu là:

$$P(2500 \leq X \leq 3000) = (3000 - 2500) \frac{1}{3000} = \frac{1}{6}$$

b. Xác suất mà cửa hàng đó bán ít nhất 4000 lít một ngày là

$$P(4000 \leq X) = (5000 - 4000) \frac{1}{3000} = \frac{1}{3}$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn

Định nghĩa (Phân phối chuẩn)

Đại lượng ngẫu nhiên liên tục X được gọi là tuân theo **phân phối chuẩn** ứng với kỳ vọng μ , độ lệch chuẩn σ với **hàm mật độ xác suất** có dạng, ký hiệu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall \sigma > 0, x \in \mathbb{R}.$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn

Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì:

- $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$
- $X + c \sim N(\mu + c, \sigma^2), cX \sim N(c\mu, (c\sigma)^2).$
- $P(|X - \mu| < k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$, trong đó $\Phi(k)$ là hàm phân phối chuẩn tắc.
- Nếu $Y \sim N(\lambda, \tau^2)$, và Y độc lập với X thì:

$$Y + X \sim N(\lambda + \mu, \tau^2 + \sigma^2).$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn tắc

Phân phối chuẩn trong trường hợp $\mu = 0, \sigma = 1$ được gọi là phân phối chuẩn tắc.

Một đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có **phân phối chuẩn tắc** được ký hiệu là $X \sim N(0, 1)$.

Khi đó, hàm mật độ xác suất (còn được gọi là hàm mật độ Gauss) được xác định bởi:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn tắc

Định nghĩa (Hàm phân phối chuẩn tắc - Hàm phân phối Gauss)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa (Hàm tích phân Laplace)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \forall x > 0.$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn tắc

Tính chất của hàm $\Phi(x)$:

- $0 \leq \Phi(x) \leq 1$
- $\Phi(x)$ là hàm liên tục, không giảm theo x
- $\Phi(-\infty) = 0, \quad \Phi(\infty) = 1$
- $\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \varphi(x).$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn tắc

Giả sử $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, sử dụng phép biến đổi $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Khi đó, $Z \sim N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn tắc

Ví dụ minh họa

Nhu cầu tiêu thụ xăng/dầu ở một đại lý xăng/dầu tuân theo phân phối chuẩn với kỳ vọng 1000 lít và độ lệch chuẩn là 100 lít mỗi ngày.

Ở trong kho của đại lý đó có đúng 1100 lít xăng để bán mỗi ngày. Hỏi đại lý xăng/dầu đó đáp ứng được bao nhiêu phần trăm nhu cầu xăng/dầu nơi đó trong một ngày?

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn tắc

Đặt X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số lít xăng/dầu bán ra mỗi ngày ở đại lý đó

$$X \sim N(1000, 100)$$

Từ đó, áp dụng công thức ta tính được:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1100) &= P\left(\frac{X - 1000}{100} \leq \frac{1100 - 1000}{100}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1100 - 1000}{100}\right) = \Phi(1) = 0.9778 \end{aligned}$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn tắc

Ví dụ minh họa

Hãy xem xét một khoản đầu tư trả về lợi nhuận là phân phối chuẩn với giá trị kỳ vọng là 10% và độ lệch chuẩn là 5%.

a. Xác định xác suất bị lỗ.

b. Tìm xác suất bị lỗ khi độ lệch chuẩn bằng 10%.

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn tắc

a. Đặt X là số tiền lợi nhuận thu được từ khoản đầu tư đó. Đầu tư mất tiền khi lợi nhuận âm $P(X < 0)$.

Áp dụng công thức ta có

$$\begin{aligned} P(X < 0) &= P\left(\frac{X - 10}{5} < \frac{0 - 10}{5}\right) \\ &= P(Z < -2) = \Phi(-2) = 0.0228 \end{aligned}$$

Vậy xác suất đầu tư thua lỗ là 0.0228.

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối chuẩn tắc

b. Nếu chúng ta tăng độ lệch chuẩn lên 10%, xác suất bị lỗi khi ấy trở thành

$$\begin{aligned} P(X < 0) &= P\left(\frac{X - 10}{10} < \frac{0 - 10}{10}\right) \\ &= P(Z < -1) = \Phi(-1) = 0.1587 \end{aligned}$$

Như vậy, việc tăng độ lệch chuẩn sẽ làm tăng khả năng thua lỗ.

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Student

Định nghĩa (Phân phối Student)

Đại lượng ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có **phân phối Student (hay phân phối t)** với bậc tự do n , ký hiệu là $X \sim t(n)$, với có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Student

Trong đó hàm Gamma:

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{u-1} dx$$

Hàm Gamma có những tính chất sau:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$.

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Student

Tính chất của phân phối Student

Cho X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục có phân phối Student với bậc tự do n . Khi đó:

- $\mathbb{E}(X) = 0, \quad \forall n > 1$
- $\text{Var}(X) = \frac{n}{n-2}, \quad \forall n > 2$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Chi bình phương

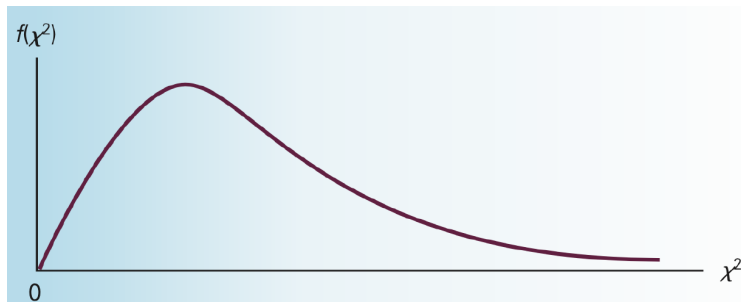
Định nghĩa (Phân phối Chi bình phương χ^2)

Đại lượng ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có **phân phối Chi bình phương** với bậc tự do n , ký hiệu là $X \sim \chi^2(n)$ với hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Chi bình phương

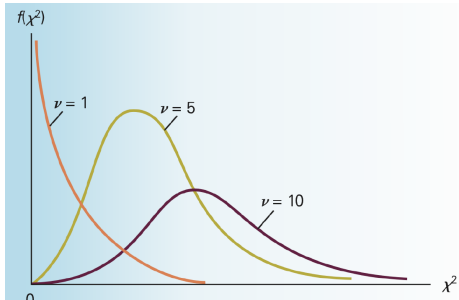


Hình: Hàm mật độ xác suất phân phối Chi bình phương

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Chi bình phương

Ta thấy, với bậc tự do càng lớn, phân phối Chi bình phương càng gần với phân phối chuẩn.



2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Chi bình phương

Kỳ vọng và phương sai của phân phối Chi bình phương là:

$$\mathbb{E}(X) = n, \quad \text{Var}(X) = 2n$$

với n là bậc tự do của đại lượng ngẫu nhiên X .

Phân phối Chi bình phương

- Nếu $X \sim N(0, 1)$ thì $X^2 \sim \chi^2(1)$
- Nếu $X_i \sim \chi^2(1), \forall i = \overline{1, n}$, đồng thời chúng độc lập về xác suất thì $\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2(n)$.

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Chi bình phương

Giả sử có U là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc $N(0, 1)$, V là đại lượng ngẫu nhiên độc lập với U , có phân phối Chi bình phương với n bậc tự do.
Khi đó, đại lượng ngẫu nhiên:

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$$

sẽ tuân theo phân phối Student với n bậc tự do.

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Fisher

Định nghĩa (Phân phối Fisher - Snedecor)

Đại lượng ngẫu nhiên X có quy luật phân phối Fisher - Snedecor với bậc tự do p và q , ký hiệu $X \sim F(p, q)$ với hàm mật độ xác suất của X có dạng:

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Fisher

Định nghĩa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \times \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{2}} \times \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{\left[1 + \frac{p}{q}x\right]^{\frac{p+q}{2}}}, & \text{nếu } x > 0 \\ 0, & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Fisher

Kỳ vọng và phương sai của đại lượng ngẫu nhiên $X \sim F(p, q)$ là:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{q}{q-2}, \quad \forall q > 2$$

$$\text{Var}(X) = 2 \left(\frac{q}{q-2} \right)^2 \frac{p+q-2}{p(q-4)}, \quad \forall q > 4$$

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Fisher

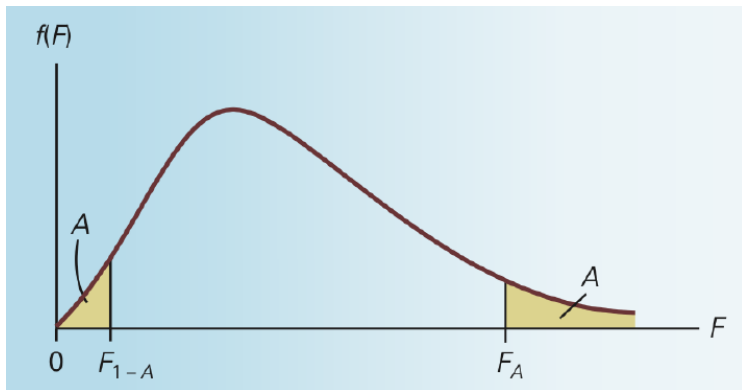
Nếu U, V là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập với nhau, cùng tuân theo phân phối Chi bình phương với bậc tự do lần lượt là n_1, n_2 .
Khi đó, đại lượng ngẫu nhiên:

$$X = \frac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}}$$

sẽ có **phân phối Fisher- Snedecor**, với bậc tự do lần lượt là n_1, n_2 .

2. Các quy luật phân phối của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Phân phối Fisher



3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối siêu bội bằng phân phối nhị thức

Ví dụ minh họa

Lấy ngẫu nhiên 5 lọ từ một lô thuốc lớn có tỷ lệ lọ hỏng là $p = 0.2$. Gọi X là số lọ hỏng trong 5 lọ lấy ra. Tìm bảng phân phối xác suất của X .

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối siêu bội bằng phân phối nhị thức

Ta có $X \sim H(N, m, 5)$ với N là số lọ trong lô thuốc và m là số lọ hỏng. Do N lớn và $\frac{m}{N} = 0.2$ nên ta có thể xấp xỉ X bằng phân phối nhị thức: $X \sim B(5, 0.2)$.

Khi đó:

$$p(x) = P(X = x) = C_5^x (0.2)^x (0.8)^{5-x}, \quad \forall x = \overline{0, 5}.$$

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối siêu bội bằng phân phối nhị thức

Bảng phân phối xác suất của X có dạng :

X	0	1	2	3	4	5
P	0.32768	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.00032

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

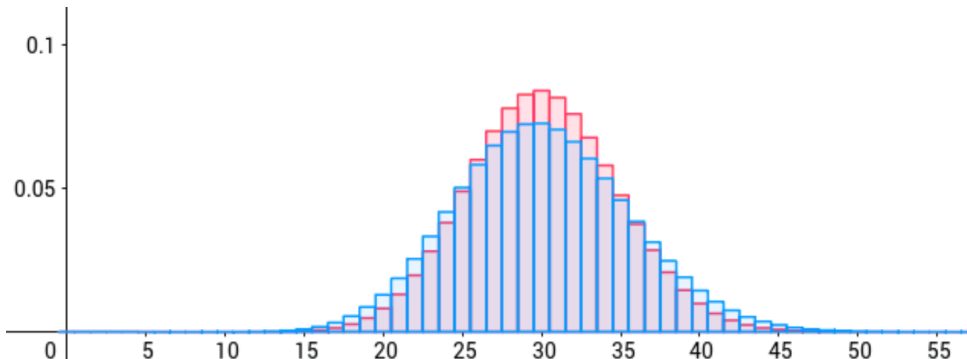
Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson

Xét biến ngẫu nhiên X với phân phối nhị thức $X \sim B(n, p)$ khi cỡ mẫu n lớn và p khá nhỏ, người ta thường xấp xỉ phân phối của X bằng phân phối Poisson: $X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = np$.

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson

Xấp xỉ giữa phân phối nhị thức $B(n = 118, p = 0.26)$ (màu đỏ) và phân phối Poisson $P(\lambda = 118 \times 0.26 = 30.09)$ (màu xanh)



3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson

Ví dụ minh họa

Phân phối nhị thức $B(20; .05)$ có thể xấp xỉ bởi phân phối Poisson với $\lambda = 20 \times 0.05 = 1$, thông qua bảng so sánh các xác suất thành phần như sau:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
B	0.358	0.378	0.189	0.059	0.013	0.003	0.000	0.000
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.015	0.003	0.001	0.000

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối nhị thức và Poisson bởi phân phối chuẩn

Định lý (Định lý giới hạn trung tâm)

Cho $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với kỳ vọng và phương sai hữu hạn:

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu, \quad \text{Var}(X_k) = \sigma^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối nhị thức và Poisson bởi phân phối chuẩn

Định lý (Định lý giới hạn trung tâm (tiếp))

Khi đó, quy luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên:

$$U_n^c = \frac{U_n - \mathbb{E}(U_n)}{\sqrt{\text{Var}(U_n)}}, \quad \text{với } U_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

sẽ hội tụ tới quy luật chuẩn tắc $N(0, 1)$ khi $n \rightarrow \infty$.

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối nhị thức và Poisson bởi phân phối chuẩn

Tức là:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n^c < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ví dụ minh họa

Chọn ngẫu nhiên 192 số trên đoạn $[0, 1]$. Xác suất để tổng số điểm thu được nằm trong khoảng $(88, 104)$ là bao nhiêu?

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối nhị thức và Poisson bởi phân phối chuẩn

Đặt X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ tổng số điểm thu được. Khi đó ta có, $X = \sum_{i=1}^{192} X_i$, trong đó các đại lượng ngẫu nhiên X_i độc lập và tuân theo phân phối đều liên tục trên khoảng $(0, 1)$.

Do đó,

$$\mathbb{E}(X_i) = 0.5, \quad \text{Var}(X_i) = \frac{1}{12} \quad \forall i = \overline{1, 192}$$

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối nhị thức và Poisson bởi phân phối chuẩn

Từ đây ta tính được:

$$\mathbb{E}(X) = 96, \quad \text{Var}(X) = 4.$$

Do đó, áp dụng định lý giới hạn trung tâm ta có:

$$\begin{aligned} P(88 < X < 104) &= \Phi\left(\frac{104 - 96}{4}\right) - \Phi\left(\frac{88 - 96}{4}\right) \\ &= 2\Phi(2) \\ &= 0.9544 \end{aligned}$$

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối nhị thức bởi phân phối chuẩn

Ví dụ minh họa

Theo Experian Automotive, trong số các gia đình sở hữu xe hơi tại Mỹ, có 35% gia đình để từ 2 đến 3 chiếc ô tô trong nhà. Xét một mẫu gồm 400 gia đình sở hữu xe hơi tại Mỹ. Tìm xác suất trong số đó có:

- Ít hơn 150 gia đình để từ 2 đến 3 chiếc trong nhà.
- Ít nhất 160 gia đình để từ 2 đến 3 chiếc trong nhà.

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối nhị thức bởi phân phối chuẩn

Trong số 400 gia đình sở hữu xe hơi tại Mỹ, gọi X là số gia đình có từ 2 đến 3 chiếc xe hơi trong nhà. Khi đó, X có phân phối nhị thức $X \sim B(400, 0.35)$.

Ta có thể xấp xỉ phân phối của X bởi phân phối chuẩn với $\mu = np = 140$ và $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{91}$.

$$\text{a. } P(X < 150) = \Phi\left(\frac{150 - 140}{\sqrt{91}}\right) = 0.8531$$

$$\text{b. } P(X \geq 160) = 1 - P(X < 160) = 1 - \Phi\left(\frac{160 - 140}{\sqrt{91}}\right) = 0.0179$$

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối Poisson bởi phân phối chuẩn

Nếu đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối Poisson với $\lambda \geq 5$.
Khi đó, có thể xấp xỉ X bởi phân phối chuẩn với $\mu = \lambda$ và $\sigma^2 = \lambda$.

Ví dụ minh họa

Số tai nạn lao động trung bình trong một năm của một nhà máy là 6.5 vụ. Tính xác suất trong một năm nào đó:

- Có tối đa 7 vụ tai nạn lao động.
- Ít hơn 6 vụ tai nạn lao động.

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối Poisson bởi phân phối chuẩn

3. Xấp xỉ giữa các phân phối

Xấp xỉ phân phối Poisson bởi phân phối chuẩn

Gọi X là số tai nạn lao động trong một năm của nhà máy. Khi đó $X \sim P(6.5)$. Vì $\lambda \geq 5$ nên ta dùng xấp xỉ phân phối chuẩn với $\mu = \lambda = 6.5$ và $\sigma^2 = \lambda = 6.5$.

Ta có:

a.

$$\begin{aligned} P(X \leq 7) &= P\left(Z \leq \frac{7 - 6.5}{\sqrt{6.5}}\right) \\ &= P(Z \leq 0.19) \\ &= 0.5753 \end{aligned}$$

